線形状態空間システムの周波数変換の性質に関する研究

越田 俊介
東北大学大学院工学研究科 電子工学専攻 助手

本研究の概要

本研究は，電気工学・情報工学・通信工学・機械工学などさまざまな分野の基礎として広く知られている「線形状態空間システム」の解析を通して，システムの動的挙動に関する数理的理解を深めることを目的とする理論的な研究である．本研究者のグループでは，線形状態空間システムの「周波数変換」の性質について解析を行い，その結果，主として信号処理の分野で重要な性質を解明している．この性質を用いることにより，高精度ディジタルフィルタの合理的･効果的な実現理論が確立され，音声処理や画像処理など幅広い信号処理技術への応用が期待できる．

1. 研究の背景・目的

線形状態空間システム，すなわち状態空間表現によって記述される線形システムは，システムの入出力に加えて内部の状態をも解析できるという特長があり，伝達関数表現に基づくシステム解析法よりも広範な問題を取り扱うことができる．内部の状態についての解析は実用的な面でも非常に重要であり，工学のさまざまな技術に応用されている．たとえば信号処理の分野では，広いダイナミックレンジを有するアクティブフィルタの実現理論や，量子化誤差の影響の小さい高精度ディジタルフィルタの実現理論において，状態空間表現が中心的な役割を果たしている．しかしその一方で，状態空間表現に基づくシステムの解析は，一般的に伝達関数表現よりも複雑になってしまうという欠点がある．このため，線形システム理論に関する研究分野では，状態空間表現に基づく解析が重要であると考えられながらもまだ十分に成果が出されていないようなテーマが数多く存在する．

本研究では，そのようなテーマの一つとして「周波数変換」をとりあげ，システムの内部状態の観点から周波数変換の新しい性質を明らかにする．そして，解明した性質を応用し，高精度ディジタルフィルタを合理的かつ効果的に実現するための新しい理論の確立を目指す．

2. 線形システムの状態空間表現および周波数変換について

ここでは，本研究の基礎となる状態空間表現および周波数変換について，線形離散時間システムを対象として概説する．

2.1 状態空間表現

N 次の 1 入力 1 出力の安定な伝達関数 $H(z)$ をもつ線形離散時間システムの次の状態空間表現を考える．

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{b}u(n) \quad (1)$$

$$y(n) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(n) + du(n) \quad (2)$$

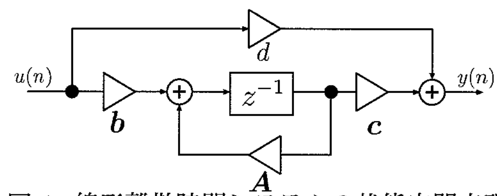

図 1: 線形離散時間システムの状態空間表現

ここで，$u(n)$ と $y(n)$ はそれぞれシステムの入力と出力であり，$\boldsymbol{x}(n)$ はシステムの遅延素子の出力を表す状態ベクトルである．また，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, d$ は適当なサイズの実係数行列である．係数行列と伝達関数は

$$H(z) = d + \boldsymbol{c}(z\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} \quad (3)$$

の関係にある．ただし，$\boldsymbol{I}_N$ は $N \times N$ の単位行列を表す．このシステムのブロック図を図 1 に示す．

システムの内部状態の挙動について議論するために重要な役割を占めるのが，可制御性グラミアンおよび可観測性グラミアンとよばれる行列である．これらのグラミアンは，係数行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対する次のリアプノフ方程式の解 $\boldsymbol{K}$ および $\boldsymbol{W}$ としてそれぞれ求められる．

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}^t + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^t \quad (4)$$

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{c}^t\boldsymbol{c} \quad (5)$$

信号処理の分野では，可制御性グラミアンと可観測性グラミアンはディジタルフィルタおよびアナログフィルタの構造の特徴を表す行列として知られており，高精度フィルタの実現問題を考える上で，非常に重要な役割を担っている．すなわち，精度の高いフィルタ構造を実現するためには，システムの可制御性グラミアン $\boldsymbol{K}$ と可観測性グラミアン $\boldsymbol{W}$ を適切な形に選ぶ必要がある．この問題は世界中で盛んに研究されており，多くの成果が IEEE などの著名な学術雑誌において発表されている [1–5].

2.2 周波数変換

周波数変換とは，与えられた伝達関数 $H(z)$ に対して $z^{-1} \leftarrow 1/F(z)$ の変数変換を適用することにより，新しいシステム $H(F(z))$ を得る手法である．ここで，$1/F(z)$ は次式で与えられる M 次の全域通過関数である．

$$\frac{1}{F(z)} = \pm \prod_{i=1}^{M} \frac{z^{-1} - p_i^*}{1 - p_i z^{-1}}, \quad |p_i| < 1 \quad (6)$$

この変換はディジタルフィルタの簡易設計法として知られており，図 2 に示されるように，遮断周波数が既知の低域通過フィルタから任意の遮断周波数を有する各種のフィルタに変換することができる．

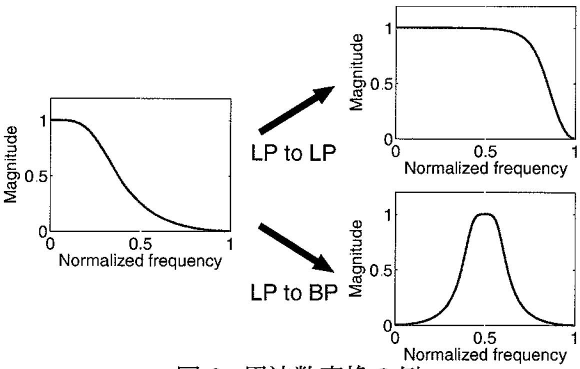

図 2: 周波数変換の例

3. 研究成果

本研究により，システムの内部状態の挙動が周波数変換とどのような関係にあるかが解明された．この結果は高精度ディジタルフィルタの実現に対して非常に有用であり，音声処理や画像処理など幅広い信号処理技術に応用できると見込まれる．以下に，本研究の成果の概要を述べる．

3.1 可制御性・可観測性グラミアンを保存する周波数変換の記述

下記の定理 1 で述べる通り，これまで知られている状態方程式上の周波数変換の記述 [6] において，$1/F(z)$ に対して構造の制約を設けることにより，システムの可制御性グラミアンと可観測性グラミアンを保存する新しい周波数変換の記述を導出した [7].

定理 1 N 次の安定なシステム $H(z)$ および M 次の全域通過関数 $1/F(z)$ の状態空間表現の係数をそれぞれ $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},d)$ および $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\delta)$ とする．また，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\delta)$ の可制御性グラミアンを $\boldsymbol{Q}$ とする．ここで，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\delta)$ と等価な実現 $(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Lambda},\delta)$ を考え，$\boldsymbol{\Lambda}$ は $\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^t=\boldsymbol{Q}$ を満足する任意の正則行列であるとする．これらの係数行列を用いて，$H(F(z))$ の係数行列 $(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{b}},\widetilde{\boldsymbol{c}},\widetilde{d})$ を次式のように与える．

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda})\otimes\boldsymbol{I}_N+(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Lambda})\otimes[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_N-\delta\boldsymbol{A})^{-1}] \tag{7}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\beta})\otimes[(\boldsymbol{I}_N-\delta\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}] \tag{8}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Lambda})\otimes[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{I}_N-\delta\boldsymbol{A})^{-1}] \tag{9}$$

$$\widetilde{d} = d+\delta\boldsymbol{c}(\boldsymbol{I}_N-\delta\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b} \tag{10}$$

ただし，$\otimes$ は行列のクロネッカー積である．このようにして与えられるシステム $(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{b}},\widetilde{\boldsymbol{c}},\widetilde{d})$ の可制御性グラミアンと可観測性グラミアンは，変換前のシステム $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},d)$ の可制御性・可観測性グラミアンをブロック対角成分とする $MN\times MN$ のブロック対角行列としてそれぞれ与えられる．すなわち，(7)–(10) 式はもとのシステムの可制御性・可観測性グラミアンを保存する周波数変換となっている． □

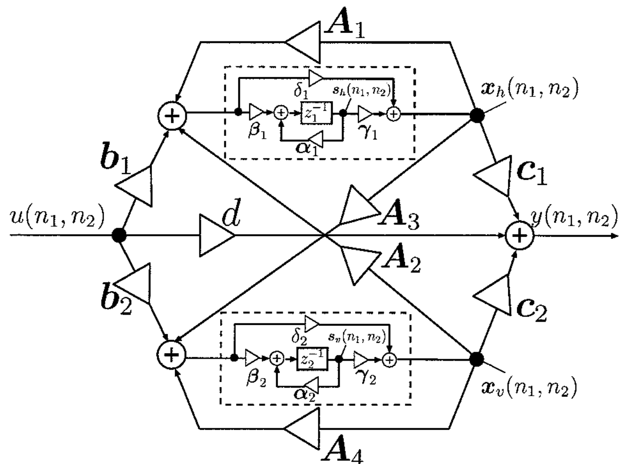

図 3: 2 次元ディジタルフィルタの状態空間表現に基づく周波数変換

定理 1 は，周波数変換によって生成されるさまざまなシステムに対して，同一の可制御性・可観測性グラミアンをもたせることが可能であることを示している．この理論をディジタルフィルタの実現問題に適用することにより，平衡形 (統計的係数感度最小構造) や丸め誤差最小構造といった実用上有益なディジタルフィルタの構造が，定理 1 の周波数変換の前後で保存されるという重要な性質が得られる．したがって，ある与えられたフィルタが精度の高い構造を有している場合，その高い精度を保ったまま入出力特性を自由に変更することが可能となる．

なお，定理 1 は離散時間システムに対する記述であるが，本研究では連続時間システムに対しても同様に，可制御性・可観測グラミアンを保存する周波数変換の記述を導出している [8].

3.2 2 次元ディジタルフィルタにおける議論

2 次元ディジタルフィルタの周波数変換の性質について，1 次元の場合と同様に状態空間表現に基づいて数学的な解析を行った．2 次元ディジタルフィルタは数学的な扱いが非常に困難であるため，1 次元の場合のように可制御性・可観測性グラミアンに関する性質はまだ解明できていないが，以下に述べるように，変換後のシステムの記述や量子化誤差の解析においてこれまで明らかにされていなかった重要な知見を得ている．

本研究では，まず図 3 に示すように 2 次元ディジタルフィルタの周波数変換を状態方程式上で実現する記述法を導出した [9]．この記述法は，単に変換後のシステムの状態空間表現を与えるだけでなく，従来用いられていた手法である「伝達関数から状態空間表現へ」の変換よりも簡潔にシステムを記述することができ，周波数変換後の 2 次元ディジタルフィルタをより少ない計算量で実現することが可能である．

また，本研究では図 3 の記述法を用いて，2 次元ディジタルフィルタの量子化誤差の最小値と周波数変換との関係について議論した．その結果，変換に用いる関数が厳密にプロパーである場合に限り，量子化誤差の最小値が周波数変換に対して不変となることを示した [10].

3.3 本研究成果の応用について

上述の研究成果は，ディジタルフィルタの実現技術の発展に大きく貢献するものと期待できる．すでに述べた通り，精度の高いディジタルフィルタを実現するためには，フィルタの入出力関係だけでなく内部の状態についても考慮する必要がある．周波数変換を用いてフィルタを実現する場合，これまで知られている理論では内部状態に関する問題が全く考慮されていなかったが，本研究の成果により，周波数変換とフィルタの内部状態との関係が明らかにされ，精度の高いフィルタを従来よりも簡単な操作で設計・合成することが可能となった．この成果は単に実現のコスト削減に役立つだけでなく，入出力特性をリアルタイムに変化させる可変ディジタルフィルタの実現技術に対しても有用となる．

4. 今後の課題

これまでの研究において，1 次元ディジタルフィルタの実現に関する成果は十分得られているが，2 次元ディジタルフィルタにおける議論はまだ不十分である．そこで，今後は 2 次元ディジタルフィルタの可制御性・可観測性と周波数変換との関係を 1 次元と同様に明らかにし，その結果を高精度フィルタの実現へ応用することを検討している．

また，前章で述べた通り，本研究では連続時間システムを対象とした議論も行い，離散時間システムと同様の有益な知見をすでに得ている [8]．今後の研究では，この知見を利用して，広いダイナミックレンジを有するアクティブフィルタの新しい実現理論について検討する予定である．

さらに，本研究成果を制御工学や回路解析といった他の分野に応用することも検討している．具体的には，高次システムの近似手法として有名な平衡打ち切りによるモデルオーダリダクション [11] に対して本研究成果を適用し，任意の周波数領域の近似誤差を低減できるような新しい近似手法を確立することを目指している．

参考文献

[1] W. M. Snelgrove and A. S. Sedra, “Synthesis and analysis of state-space active filters using intermediate transfer functions,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-33, no. 3, pp. 287–301, Mar. 1986.

[2] G. Groenewold, “The design of high dynamic range continuous-time integratable bandpass filters,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-38, no. 8, pp. 838–852, Aug. 1991.

[3] C. T. Mullis and R. A. Roberts, “Synthesis of minimum roundoff noise fixed point digital filters,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-23, no. 9, pp. 551–562, Sept. 1976.

[4] M. Kawamata and T. Higuchi, “A unified approach to the optimal synthesis of fixed-point state-space digital filters,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-33, no. 4, pp. 911–920, Aug. 1985.

[5] M. Iwatsuki, M. Kawamata, and T. Higuchi, “Statistical sensitivity and minimum sensitivity structures with fewer coefficients in discrete time linear systems,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-37, no. 1, pp. 72–80, Jan. 1990.

[6] C. T. Mullis and R. A. Roberts, “Roundoff noise in digital filters: Frequency transformations and invariants,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-24, no. 6, pp. 538–550, Dec. 1976.

[7] S. Koshita, M. Abe, and M. Kawamata, “Gramian-preserving frequency transformation for state-space digital filters,” in *Proc. IEEE Asia Pacific Conference on Circuits and Systems*, Dec. 2006, to appear.

[8] ——, “Gramian-preserving frequency transformation for linear continuous-time state-space systems,” in *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, May 2006, pp. 453–456.

[9] S. Koshita and M. Kawamata, “State-space formulation of frequency transformation for 2-D digital filters,” *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 11, no. 10, pp. 784–787, Oct. 2004.

[10] ——, “Invariance of second-order modes under frequency transformation in 2-D separable denominator digital filters,” *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 16, no. 3, pp. 305–333, July 2005.

[11] B. C. Moore, “Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction,” *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-26, no. 1, pp. 17–32, Feb. 1981.