効率的離散アルゴリズムの研究開発とその応用
— 部分 k 木アルゴリズム —

東北大学大学院情報科学研究科
周 暁

1 まえがき

インターネット，交通網，VLSI配線，通信スケジューリング，ビデオ・オン・デマンドなどに関する多くの問題が，点およびそれらを結ぶ辺からなるグラフを用いてモデル化できる．グラフはその簡明さから表現の道具として優れており，グラフでモデル化された問題は計算機処理しやすいといった特徴がある．例えば，コンピュータネットワークの通信で，あらかじめコンピュータ間で通信要求が決められており，各通信要求にかかる時間もわかっておるとする．各コンピュータは同時に他の複数のコンピュータとは通信できなく，通信が始まる前に必ず前回の通信が全部終了していなければいけない．このような条件を満足し，最短時間で終了する通信スケジュールングを求めたい．この通信スケジューリングはグラフを用いて次のように定式化できる．コンピュータをグラフの点に対応させ，通信要求をグラフの辺に対応させる．ここでグラフを辺彩色すること，即ち全ての辺に色を塗り，隣接する辺には異なる色を塗ることは，ネットワーク上の通信スケジューリングを求めてることに対応する．同じ色で塗られた辺に対応する通信は同じ時間帯に同時に実行することを意味している．このような辺彩色の色数を最小にすることは，最短時間での通信スケジューリングに対応している．このように，辺彩色問題を効率よく解くアルゴリズムが得られれば，コンピュータネットワーク上での通信スケジューリング問題などに応用することができる．

本研究では応用上よく現れる木，直並列グラフ，部分 k 木などを主な対象とした．これらのグラフに対して，点彩色，辺彩色，全彩色問題など重要な組合せ問題を解く効率的なアルゴリズムを開発した．部分 k 木は木の一般化であり，普通の木は部分1木であり，外平面グラフや直並列グラフは部分2木である．部分 k 木は直並列グラフの一般化ともいえる．一般グラフのNP完全問題に対しては効率よいアルゴリズムは一般には存在しないだろうと予想されている．しかし，部分 k 木にに対しては多くのNP完全問題が線形時間または多項式時間で解けることが知られている [1, 2, 6, 8, 9, 26]．そのような問題の多くは "entended monadic logic of second order" で表現できる．また，辺彩色問題のようにentended monadic logic of second order で表せないグラフ分割問題も部分 k 木に対しては線形時間または多項式時間で解けることがわかってきった [4, 8, 9, 11, 12, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35]．

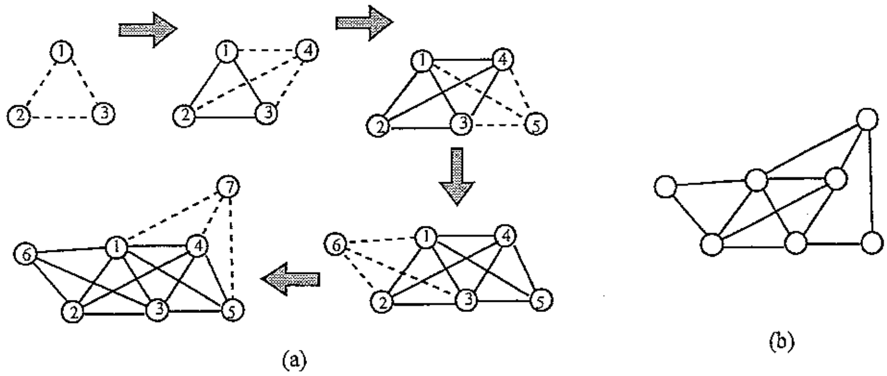


図 1: (a)3 木と (b) 部分 3 木

本文では主に点彩色問題，辺彩色問題，全彩色問題を例にして部分 k 木に対する逐次アルゴリズムの設計法を紹介する．

2 準備

本節では定義をいくつか与える．本文では自己ループのない単純グラフ $G=(V,E)$ を扱う．ここで V は G の点集合であり，E は G の辺集合である．$d(v)$ は点 $v \in V$ の次数であり，$\Delta(G)$ は G の最大次数である．

定義 2.1 k 木は次のように再帰的に定義される．

(1) k 点からなる完全グラフは k 木である．

(2) グラフ $G=(V,E)$ が k 木であり，G の k 点 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ は完全部分グラフを誘導するとする．このとき新しい点 w と k 本の辺 $(v_i, w), 1 \le i \le k$, を G に付け加えて得られたグラフ $H=(V \cup \{w\}, E \cup \{(v_i,w) \mid 1 \le i \le k\})$ も k 木である．

(3) k 木とは (1) から (2) を繰り返し適用して得られたグラフである．

定義 2.2 部分 k 木とは k 木の部分グラフである．

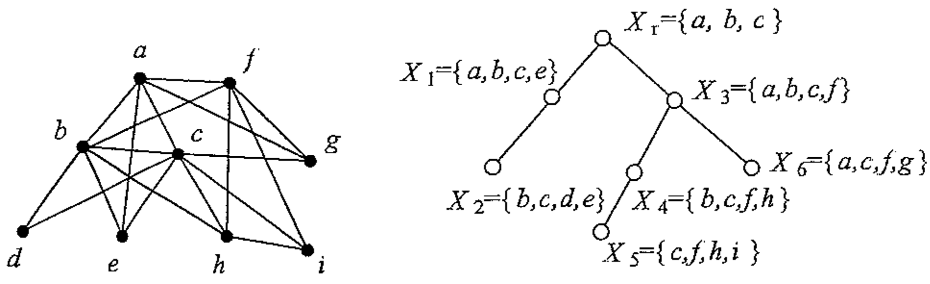
明らかに部分 k 木 $G=(V,E)$ は単純グラフであり，しかも $|E|<k|V|$ である．図 1(a) に 3 木の生成の過程を示し，図 1(b) に図 1(a) の部分 3 木を示す．

定義 2.3 グラフ $G=(V,E)$ の分解木とは次の (1)–(3) の条件を満たす木 $T=(V_T,E_T)$ である．ここで，V_T は V の部分集合族である．

(1) グラフ G の点は木 T の少なくとも一つの節点 $X_i \in V_T$ に属している．

(2) G の各辺 $e=(v,w) \in E$ に対し，$v, w \in X_i$ なる木 T の節点 $X_i \in V_T$ がある．

(3) 全ての節点 $X_i, X_j, X_l \in V_T$ に対し，もし X_i から X_l への T 上の道に X_j があれば，$X_i \cap X_l \subseteq X_j$ である．



(a) (b)

図 2: (a) 部分 3 木と (b) その分解木

図 2(b) に図 2(a) の部分 3 木の分解木を示す．分解木の幅とは $\max_{X\in V_T}|X|-1$ である．グラフ $G=(V,E)$ の幅とは全ての分解木の幅のうちに最小な幅であり，$treewidth(G)$ と書く．グラフ G が部分 k 木である必要十分条件は $treewidth(G)\leq k$ である．Bodlaender 氏は次の定理を証明した [4]．

定理 2.1 k が定数ならば，部分 k 木の分解木は線形時間で求められる．

分解木 T の任意の節点 X_r を選び，T を X_r を根とする根付き木であるとみなす．各辺 $e=(v,w)\in E$ に対して $v,w\in X_i$ なる分解木 T の一つ節点 $X_i\in V_T$ を選び，$rep(e)=i$ と定義する．T の各点 X_i について

$$E(X_i)=\{e\in E \mid rep(e)=j,\ \text{節点 } X_i\in V_T \text{ を根とした } T \text{ の部分木に } X_j\in V_T \text{ が入っている．}\}$$

を定義する．辺集合 $E(X_i)$ により誘導される G の部分グラフを $G[X_i]$ と書く．

3 逐次アルゴリズム

この節では部分 k 木の分解木 T が既に求まっているとする．図 3のように木の変形を各内点に対して行うことにより，次のような性質をもつ新たな二進分解木を得ることができる．

- 分解木の点数は $O(n)$ である．ここで，n はグラフ G の点数である．
- 各内点 X_i は必ず二つのことも（例えば X_j,X_l）を持ち，$X_i=X_j$ あるいは $X_i=X_l$ である．
- 各辺 $e=(v,w)$ に対し，$v,w\in X_i$ になる葉 $X_i\in V_T$ が少なくとも一つ T にある．

分解木から二進分解木は線形時間で求めることがきでる [4]．今後，分解木といった場合は変形後の二進分解木をいうものとする．

ある彩色問題を考える．$C=\{0,1,2,\cdots\}$ とする．部分 k 木 $G=(V,E)$ の解，すなわち彩色は $h:V\cup E\to C$ である．二進分解木の内点を X_i とする．部分グラフ $G[X_i]$ の解

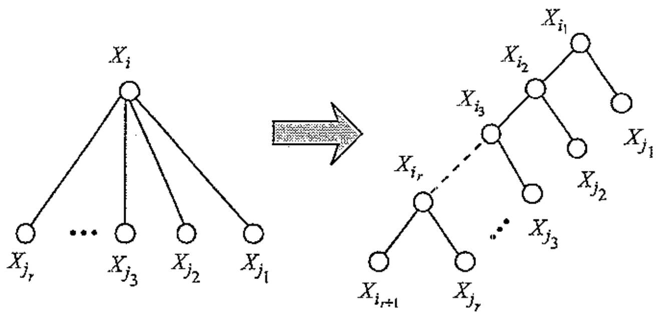


図 3: 分解木の二進木への変形

$f : V(G[X_i]) \cup E(G[X_i]) \to C$ を G の部分解と呼ぶ．ここの部分解 f から G の解まで拡張ができるならば，f は $G[X_i]$ に対する許容解であるという．X_i での解 f のベクトル表現 $S(X_i, f)$ を次のように定義する．

定義 3.1 X_i での解 f のベクトル表現 $S(X_i, f)$ とは

$$
\begin{aligned}
S(X_i, f) &= \{(X_{iv}(c, f), X_{ie}(c, f)) \mid c \in C\}, \\
X_{iv}(c, f) &= \{v \in X_i \mid f(v) = c\}, \\
X_{ie}(c, f) &= \{v \in X_i \mid f((v, x)) = c\text{かつ}(v, x) \in E(X_i)\}.
\end{aligned}
$$

f が $G[X_i]$ の部分解ならば，$S(X_i, f)$ は *good* であるという．

補題 3.1 $G[X_i]$ の二つ部分解 f と g に対して，$S(X_i, f) = S(X_i, g)$ とする．このとき f が許容解である必要十分条件は g が許容解であることである．

$S(X_i, f)$ が同じである部分解 f は同値である．

補題 3.2 $S(X_i, f) = S(X_i, g)$ になる必要十分条件は，全ての $Y, Z \subseteq X_i$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|\{c \in C : Y = X_{iv}(c, f), Z = X_{ie}(c, f)\}| \\
= \; &|\{c \in C : Y = X_{iv}(c, g), Z = X_{ie}(c, g)\}|
\end{aligned}
$$

なることである．

$Y \neq \emptyset$ のとき上式の値は 0 また 1 であるが，$Y = \emptyset$ のときには上式の値は 0 から $|C|$ までの値をとりえることに注意しよう．

上の補題とり，X_i での同値類を特徴付ける関数を次のように定義する．

定義 3.2 $S(X_i, f)$ の計量 φ_f とは次のような $2^{X_i} \times 2^{X_i}$ から $\{0, 1, \cdots, |C|\}$ への写像である．

$$\varphi_f((Y, Z)) = |\{c \in C : Y = X_{iv}(c, f), Z = X_{ie}(c, f)\}|$$

ここで $Y, Z \subseteq X_i$ である．

補題 3.3

(1) $\sum_{Y,Z\subseteq X_i}\varphi_f((Y,Z))=|C|$.

(2) $S(X_i,f)=S(X_i,g)$ なる必要十分条件は $\varphi_f=\varphi_g$ である.

定義 3.3 写像 $\varphi\ :\ 2^{X_i}\times 2^{X_i}\ \to\ \{0,1,\cdots,|C|\}$ が *good* であるとうのは，ある *good* な $S(X_i,f)$ が存在し，しかも φ の計量 φ_f が $\varphi=\varphi_f$ であることである.

T の各節点 X_i について，φ の X_i の解のベクトル表現の計量の種類は高々 $(|C|+1)^{2^{2(k+1)}}$ 個である. 各内点 X_i に対し写像 $\varphi:2^{X_i}\times 2^{X_i}\to\{0,1,\cdots,|C|\}$ が good かどうかの判定は X_i のこどもの全ての計量から $O((|C|+1)^{2^{4(k+1)}})$ 時間でできる. 各葉 X_i での全ての計量は全ての写像：$X_i\cup E(G[X_i])\to C$ を考慮して $O((|C|+1)^{(k+1)+k(k+1)/2})$ 時間で求められる. したがって，次の定理が成り立つ.

定理 3.4 部分 k 木に対しては彩色問題の最適解を多項式時間で求めることができる. ここで k は定数である.

4 点彩色問題

グラフの点彩色問題とは同じ色で塗られた点が隣接しないようにグラフの全ての点を彩色する問題である. グラフ G を点彩色するのに必要な最小色数を G の点彩色数といい，$\chi(G)$ と書く. $\chi(G)$ を求める問題は一般グラフに対してはNP 困難である. この節で第3節の手法を用いて部分 k 木の点彩色問題を解く多項式時間のアルゴリズムを与える.

色集合を $C=\{1,2,\cdots\}$ とし，部分 k 木を $G=(V,E)$ とする. 色集合 C を用いて，G を点彩色することができるかどうかを判定する問題を考える. 次の関数 $f\ :\ V\cup E\to\{0\}\cup C$ を定義する.

$$\begin{aligned} f(x)\in C &\quad:\quad x\in V\text{のとき} \\ f(x)=0 &\quad:\quad x\in E\text{のとき} \end{aligned}$$

全ての辺 $(v,w)\in E$ について，$f(v)\neq f(w)$ ならば，f は G の点彩色である. 即ち，G は C 色で点彩色できる. 従って，定理3.4より次のことがいえる.

系 4.1 点彩色問題が部分 k 木に対しては多項式時間で解ける.

5 辺彩色問題

グラフの辺彩色問題とは同じ色で塗られた辺が隣接しないようにグラフの全ての辺を彩色する問題である. グラフ G を辺彩色するのに必要な最小色数を G の辺彩色指数といい，$\chi'(G)$ と書く. $\chi'(G)$ を求める問題は一般グラフに対してはNP 困難である. この節で第3節の手法を用いて部分 k 木の辺彩色問題を解く多項式時間のアルゴリズムを与える.

色集合を $C=\{1,2,\cdots\}$ とし，部分 k 木を $G=(V,E)$ とする. 色集合 C を用いて，G を辺彩色することができるかどうかを判定する問題を考える. 次の関数 $f\ :\ V\cup E\to$

$\{0\} \cup C$ を定義する．

$$f(x) = 0 \quad : \quad x \in V のとき$$
$$f(x) \in C \quad : \quad x \in E のとき$$

全ての隣接辺 $e_1, e_2 \in E$ について， $f(e_1) \neq f(e_2)$ ならば， f は G の辺彩色である．即ち， G は C 色で辺彩色できる．従って，定理3.4より次のことがいえる．

系 5.1 辺彩色問題が部分 k 木に対しては多項式時間で解ける．

6 全彩色問題

グラフの全彩色問題とは同じ色で塗られた点と辺が隣接しないようにグラフの全ての点と辺を彩色する問題である．グラフ G を全彩色するのに必要な最小色数を G の全彩色数といい， $\chi_t(G)$ と書く． $\chi_t(G)$ を求める問題は一般グラフに対してはNP 困難である．この節で第 3 節の手法を用いて部分 k 木の全彩色問題を解く多項式時間のアルゴリズムを与える．

色集合を $C = \{1, 2, \cdots\}$ とし，部分 k 木を $G = (V, E)$ とする．色集合 C を用いて， G を全彩色することができるかどうかを判定する問題を考える．次の関数 $f : V \cup E \to C$ を定義する．全ての隣接辺 $e_1, e_2 \in E$ について $f(e_1) \neq f(e_2)$，かつ全ての辺 $e = (v_1, v_2) \in E$ について $f(v_1) \neq f(v_2)$， $f(e) \neq f(v_1)$， $f(e) \neq f(v_2)$ ならば， f は G の全彩色である．即ち， G は C 色で全彩色できる．従って，定理3.4より次のことがいえる．

系 6.1 全彩色問題が部分 k 木に対しては多項式時間で解ける．

参考文献

[1] S. Arnborg, B. Courcelle, A. Proskurowski, and D. Seese, An algebraic theory of graph reduction, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 40(5), pp. 1134–1164, 1993.

[2] S. Arnborg and J. Lagergren, Easy problems for tree-decomposable graphs, *Journal of Algorithms*, 12(2), pp. 308–340, 1991.

[3] H. L. Bodlaender, Polynomial algorithms for graph isomorphism and chromatic index on partial k-trees, *Journal of Algorithms*, 11(4), pp. 631–643, 1990.

[4] H. L. Bodlaender, A linear time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth, in *Proc. of the 25th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*, pp. 226–234, San Diego, CA, 1993.

[5] R. Borie, Generation of polynomial-time algorithms for some optimization problems on tree-decomposable graphs, Technical report, University of Alabama, 1992.

[6] R. B. Borie, R. G. Parker, and C. A. Tovey, Automatic generation of linear-time algorithms from predicate calculus descriptions of problems on recursively constructed graph families, *Algorithmica*, 7, pp. 555–581, 1992.

[7] M. Chrobak and T. Nishizeki, Improved edge-coloring algorithms for planar graphs, *Journal of Algorithms*, 11, pp. 102–116, 1990.

[8] B. Courcelle, The monadic second-order logic of graphs I: Recognizable sets of finite graphs, *Information and Computation*, 85, pp. 12–75, 1990.

[9] B. Courcelle and M. Mosbath, Monadic second-order evaluations on tree-decomposable graphs, *Theoretical Computer Science*, 109, pp. 49–82, 1993.

[10] S. Fiorini and R. J. Wilson, *Edge-Colourings of Graphs*, Pitman, London, 1977.

[11] T. Fujino, S. Isobe, X. Zhou and T. Nishizeki, Linear algorithm for finding list edge-colorings of series-parallel graphs, *IEICE Trans. on Information and Systems*, E86-D, pp 186–190, 2003.

[12] T Fujino, X. Zhou and T. Nishizeki, List edge-colorings of series-parallel graphs, *IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E86-A, pp 1034-1045, 2003

[13] H. N. Gabow, T. Nishizeki, O. Kariv, D. Leven, and O. Terada, Algorithm for edge-coloring graphs, Technical Report TRECIS-8501, Tohoku Univ., 1985.

[14] A. M. Gibbons and W. Rytter, Optimally edge-colouring outerplanar graphs is in NC, *Theoretical Computer Science*, 71, pp. 401–411, 1990.

[15] S. L. Hakimi and O. Kariv, On a generalization of edge-coloring in graphs, *Journal of Graph Theory*, 10, pp. 139–154, 1986

[16] I Holyer, The NP-completeness of edge-colouring, *SIAM J Comput.*, 10, pp. 718–720, 1981.

[17] M. Hoover, *Complexity, Structure, and Algorithms for Edge-Partition Problems*, Ph. D. thesis, Dept. of Computer Science, University of New Mexico, 1990.

[18] T. Ito, T. Nishizeki and X. Zhou, Algorithms for multicolorings of partial k-trees, *IEICE Trans. on Information and Systems*, E86-D, pp. 191–200, 2003.

[19] S Isobe, X. Zhou and T. Nishizeki, A polynomial-time algorithm for finding total colorings of partial k-trees, *International Journal of Foundations of Computer Science*, 10, pp 171–194, 1999.

[20] S. Isobe, X. Zhou and T. Nishizeki, Cost total colorings of trees, *IEICE Trans. on Information and System*, E87-D, pp.337–342, 2004.

[21] H. J. Karloff and D. B. Shmoys, Efficient parallel algorithms for edge-coloring problems, *Journal of Algorithms*, 8, pp. 39–52, 1987.

[22] T. Nishizeki and N. Chiba, *Planar Graphs: Theory and Algorithms*, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[23] S. Nakano, T. Nishizeki, and N. Saito, On the f-coloring of multigraphs, *IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-35*, 3, pp. 345–353, 1988.

[24] B. A. Reed, Finding approximate separators and computing tree-width quickly, in *Proc. of the 24th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*, pp. 221-228, 1992.

[25] O. Terada and T. Nishizeki, Approximate algorithms for the edge-coloring of graphs, *Trans. Inst. of Electronics and Communication Eng. of Japan, J65-D*, 11(4), pp. 1382–1389, 1982.

[26] K. Takamizawa, T. Nishizeki, and N. Saito, Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 29(3), pp. 623–641, 1982.

[27] X. Zhou, K. Fuse and T. Nishizeki, A linear algorithm for finding $[g, f]$-colorings of partial k-trees, *Algorithmica*, 27, pp. 227-243, 2000.

[28] X. Zhou, Y. Kanari and T. Nishizeki, Generalized vertex-coloring of partial k-trees, *IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communication and Computer Sciences*, E83-A, pp. 671–678, 2000.

[29] X. Zhou and T. Nishizeki, Decompositions to degree-constrained subgraphs are simply reducible to edge-colorings, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 75, pp. 270–287, 1999.

[30] X. Zhou and T. Nishizeki, Edge-coloring and f-colorings for various classes of graphs, *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 3, pp. 1–18, 1999.

[31] X. Zhou and T. Nishizeki, Algorithm for the cost edge-colorings of trees, *Journal of Combinatorial Optimization*, 8, pp. 97-108, 2004.

[32] X. Zhou and T. Nishizeki, Multicoloring of series-parallel graphs, *Algorithmica*, 38, pp. 271–297, 2004.

[33] X. Zhou, S. Nakano and T. Nishizeki, Edge-coloring partial k-trees, *Journal of Algorithms*, 21, pp. 598–617, 1996.

[34] X. Zhou, H. Suzuki and T. Nishizeki, A linear algorithm for edge-coloring series-parallel multigraphs *Journal of Algorithms*, 20, pp. 174–201, 1996.

[35] X. Zhou, H. Suzuki and T. Nishizeki, An NC parallel algorithm for edge-coloring series-parallel multigraphs, *Journal of Algorithms*, 23, pp 359–374, 1997.